BÖLÜM 2

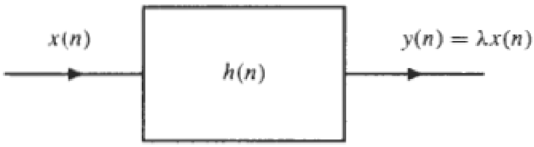
FOURIER ANALİZİ

2.1. GİRİŞ

İmlerin Fourier gösterimi, hem sürekli zaman hem de ayrık zaman im işleme için büyük önem taşır. Fourier analizi, işlem ve hesaplama kolaylığı sağlayabilmek için bir tanım kümesinden diğer bir tanım kümesine imlerin eşlemlemesi ile gerçekleştirilen bir yöntemdir. Fourier gösteriminin özellikle sağladığı kolaylık Fourier ortamında evrişim işleminin çarpım işlemine dönüşmesidir. Ayrıca bu dönüşüm, imler ve sistemlerin farklı bir yolla yorumlanmasını da sağlar. Bu bölümde ayrık zaman Fourier dönüşümü (yani, ayrık zaman imlerin Fourier dönüşümü) anlatılacaktır. Karmaşık üstel işlevlerin doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemlerin nasıl öz işlevleri olduğu ve bu özelliğin nasıl DZD sistemlerinin sıklık yanıt gösterimini doğurduğu gösterilecektir. Son olarak, ayrık zaman Fourier dönüşümünde evrişim işleminin nasıl yapıldığı ve doğrusal sabit katsayı fark denklemlerinin çözümde nasıl kullanılacağı verilecektir.

2.2. SIKLIK YANITI

DZD sistemlerin öz işlevleri, sisteme bir giriş yapıldığında bu girişe karşılık tek bir (karmaşık) çıkışın oluştuğu dizilerdir. Yani, eğer giriş x(n), $y(n)=\lambda x(n)$ gibi bir çıkış veriyorsa, çıkış çoğunlukla girişe bağımlıdır ve λ, öz değerdir.



ŞEKİL 2.1

Bu durumda ω sabit olmak üzere aşağıda gösterilen formda gözlenen imler

$$x(n) = e^{jn\omega} \qquad -\infty < n < \infty$$

DZD sistemlerinin öz işlevleridir. Bu ifade evrişim toplamından görülebilir.

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)}=e^{jn\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega}=H(e^{j\omega})e^{jn\omega}$$

$H(e^{j\omega})$ olarak gösterilen öz değer

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega} \qquad (2.1)$$

şeklindedir. Burada $H(e^{j\omega})$ genelde karmaşık değerlidir ve karmaşık üstel işlevin sıklık değeri ω'ya bağlıdır. Böylece, bu ifade gerçel ve sanal kısımlarına ayrılarak

$$H(e^{j\omega})=H_G(e^{j\omega})+jH_S(e^{j\omega})$$

veya genlik ve evre terimleri kullanılarak

$$H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\emptyset(\omega)}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)=H_G^2\left(e^{j\omega}\right)+H_S^2(e^{j\omega})$$

ve

$$\emptyset(\omega)=\tan^{-1}\left[\frac{H_G(e^{j\omega})}{H_S(e^{j\omega})}\right]$$

formundadır. DZD sistemlerin analizinde sıklık yanıtının grafiksel gösterimi büyük önem taşır ve çoğunlukla genlik ve evre grafiğinin çiziminde kullanılır. Ek olarak, diğer bir kullanışlı grafiksel gösterim, ω'ya karşı $20\log\left|H(e^{j\omega})\right|$'nin çizimidir. Log ölçekli genlik değerinin birimi decibel (dB)'dir. Örnek olarak 0 dB, $\left|H(e^{j\omega})\right|=1$ değeriyle, 20 dB $\left|H(e^{j\omega})\right|=10$ değeriyle, -20 dB ise $\left|H(e^{j\omega})\right|=0{,}1$ değeriyle eşdeğerdir. Benzer şekilde 6 dB yaklaşık olarak $\left|H(e^{j\omega})\right|=2$, -6 dB ise $\left|H(e^{j\omega})\right|=0{,}5$ ile ilişkilidir. Log genliğin çizimi, $\left|H(e^{j\omega})\right|$ küçük değerlerinde logaritmanın geniş ölçek sağlaması ve sıfıra yakın sıklık yanıtının ayrıntılı detaylarını göstermesinden dolayı avantajlıdır.

Çoğunlukla evre yerine kullanılan grup gecikmesinin gösterimi, aşağıdaki gibi verilir.

$$\tau(\omega)=-\frac{d\emptyset(\omega)}{d\omega}$$

Grup gecikmesi ölçülürken, evrenin ana değerine π'nin tamsayı katları eklenerek evre, ω'nın türevi alınabilir ve sürekli zaman işlevi olarak bulunur.

$H(e^{j\omega})$ işlevi, sıklık yanıtı olarak adlandırılır ve DZD sistemlerin tanımlanmasında önemli işlevlerden biridir. Sıklık yanıtı, bir sistem tarafından karmaşık üstel im süzgeçlendiği zaman (karmaşık) genliğin nasıl değiştiğini gösterir. Sıklık yanıtı özellikle karmaşık üstel işlevler toplamı şeklinde giriş imi ayrıştırılmak istendiğinde oldukça kullanışlıdır. Örneğin, aşağıdaki gibi verilen bir girişe

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\, e^{jn\omega_k}$$

DZD sistemin yanıtı

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k H\left(e^{j\omega_k}\right)e^{jn\omega_k}$$

olacaktır. Burada $H(e^{j\omega_k})$, ω_k sıklığında ölçülen sistemin sıklık yanıtıdır.

ÖRNEK 2.1. Gerçel değerli birim örnek yanıtı h(n) olan bir DZD sistemin girişini $x(n)=\cos(n\omega_0)$ alalım. Eğer x(n) iki üstel işlevin toplamı şeklinde gösterilmek istenirse

$$x(n)=\frac{1}{2}e^{jn\omega_0}+\frac{1}{2}e^{-jn\omega_0}$$

şeklindedir ve bu durumda sistemin yanıtı aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$y(n) = \frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-jn\omega_0}$$

Çünkü, h(n) gerçel değerlidir ve $H(e^{j\omega})$ eşlenik simetriye sahiptir.

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

Bu nedenle, y(n) bu özelliğe göre yeniden yazılırsa

$$y(n) = \frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}H^*\left(e^{j\omega_0}\right)e^{-jn\omega_0}$$

$$y(n) = \mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jn\omega_0}\right\} = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(n\omega_0 + \emptyset(\omega_0)\right)$$

bulunur.

Dönemsellik

Sıklık yanıtı, ω'nın karmaşık değerli ve 2π dönemli dönemsel bir işlevdir. Genelde bu durum, sıklık yanıtı dönemsel olmayan bir DZD sürekli zaman sisteminin sıklık yanıtına bir karşıtlık oluşturur. Bu dönemselliğin nedeni, ω_0 sıklık değerinin bir ayrık zaman karmaşık üstel işlevinin, $\omega_0 + 2\pi$ sıklık değerinin bir karmaşık üstel işlevle aynı olmasından kaynaklanır. Yani

$$x(n) = e^{jn\omega_0} = e^{jn(\omega_0+2\pi)}$$

şeklindedir. Bu nedenle eğer, DZD sistemin girişine $x(n) = e^{jn\omega_0}$ uygulandığında çıkış, $x(n) = e^{jn(\omega_0+2\pi)}$ girişinin yanıtı ile aynı olmak zorundadır. Bu da aşağıdaki ifadeyi gerektirir.

$$H(e^{jn\omega_0}) = H\left(e^{jn(\omega_0+2\pi)}\right)$$

Simetriklik

Eğer h(n) gerçel değerli ise, sıklık yanıtı sıklığın bir eşlenik simetrik işlevidir.

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

$H(e^{j\omega})$'nın eşlenik simetrik olması gerçel kısmın ω'nın çift işlevi olduğunun göstergesidir.

$$H_G(e^{j\omega}) = H_G(e^{-j\omega})$$

Benzer şekilde, sanal kısım ise tek işlevdir.

$$H_S(e^{j\omega}) = -H_S(e^{-j\omega})$$

Eşlenik simetriklik ayrıca genliğin çift

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{-j\omega})\right|$$

evre ve grup gecikmesinin tek işlev olduğunu gösterir.

$$\emptyset(\omega) = -\emptyset(-\omega) \qquad\qquad \tau(\omega) = -\tau(-\omega)$$

ÖRNEK 2.2. Birim örnek yanıtı

$$h(n) = \alpha^n u(n)$$

olan bir DZD sistemi ele alalım. Burada, $|\alpha| < 1$ olmak üzere α gerçel bir değerdir. Sıklık yanıtı bu sistem için

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

şeklindedir. Sıklık yanıtının genlik karesi

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}} = \frac{1}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}$$

ve evresi

$$\emptyset(\omega) = \tan^{-1}\frac{H_S(e^{j\omega})}{H_G(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\left[\frac{-\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right]$$

bulunur. Sonuçta, grup gecikmesi evrenin türevinin alınmasıyla elde edilir. Bu sonuç

$$\tau(\omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha\cos\omega}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}$$

şeklinde verilir.

Sıklık Yanıtının Evrilmesi

Bir DZD sistemin sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

şeklinde verildiğinde, birim örnek yanıtı integral işlemi ile geri elde edilebilir.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, e^{jn\omega} d\omega \qquad (2.2)$$

İntegral 2π uzunluklu herhangi bir dönem üzerinden alınır.

ÖRNEK 2.3. Sıklık yanıtı aşağıdaki gibi verilen bir sistemin (bu sistem ideal alçak geçiren süzgece karşılık gelmektedir),

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_m \\ 0, & \omega_m < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

birim örnek yanıtı

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\omega_m} - e^{-jn\omega_m}\right] = \frac{\sin(n\omega_m)}{\pi n}$$

şeklindedir.

2.3. SÜZGEÇLER

Sayısal süzgeç kavramı yada sadece süzgeç, çoğunlukla ayrık-zaman sistemle ilgili olarak kullanılır. Sayısal süzgeç J. F. Kaiser[1] tarafından "... genelde giriş olarak alınan örneklenmiş im veya sayı dizisinin çıkış imi olarak adlandırılan ikinci bir sayı dizisine dönüştürülmesi işlemi veya algoritmasıdır. Hesaplama işlemleri; alçak geçiren süzgeçleme (yumuşatma),

[1] System Analysis by Digital Computer, F. F. Kuo, J. F. Kaiser, Eds., John Wiley and Sons, NY, 1966.

bantgeçiren, süzgeçleme, ara değerleme, türevlerin genelleştirilmesi vb. olabilir." şeklinde tanımlanır.

Süzgeçler doğrusallık, kaydırma ile değişmezlik, nedensellik, kararlılık gibi sistem özellikleri ile tanımlanabilir ve sıklık yanıtı formu ile sınıflanabilir. Bu sınıflamanların bazıları aşağıda belirtilmiştir.

Doğrusal Evre

Bir doğrusal kayma ile değişmez (DKD) sistem, eğer sıklık yanıtı aşağıdaki gibi tanımlanbiliyorsa, doğrusal evreye sahiptir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\alpha\omega}$$

Burada; α gerçel bir sayı ve $A\left(e^{j\omega}\right)$ ω'nın gerçel değerli bir işlevidir. $H\left(e^{j\omega}\right)$'nın evresinin

$$\emptyset_h(\omega) = \begin{cases} -\alpha\omega & \text{when } A\left(e^{j\omega}\right) \geq 0 \\ -\alpha\omega + \pi & \text{when } A\left(e^{j\omega}\right) < 0 \end{cases}$$

olduğu verilmelidir. Benzer şekilde, bir süzgeç eğer sıklık yanıtı aşağıdaki gibi tanımlıysa genelleştirilmiş doğrusal evredir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right)e^{-j(\alpha\omega-\beta)}$$

Böylece, doğrusal evreli veya genelleştirilmiş doğrusal evreli süzgeçler sabit bir grup geçikmesine sahiptir.

Tüm Geçiren

Bir sistem, eğer sıklık yanıtının genliği sabit ise tüm geçiren süzgeç olarak tanımlanır.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = c$$

Aşağıda verilen sıklık yanıtına sahip bir tüm geçiren süzgeç örneği bir sistemdir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

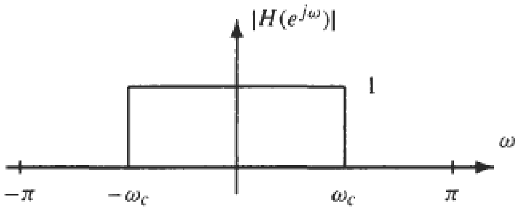
Burada, $|\alpha| < 1$ koşulu ile α, herhangi bir gerçel sayıdır. Bu tüm geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı

$$h(n) = -\alpha\delta(n) + (1 - \alpha^2)\alpha^{n-1}u(n-1)$$

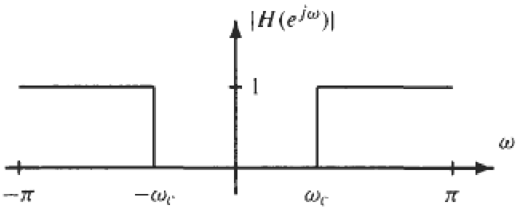
şeklindedir.

Sıklık Seçici Süzgeçler

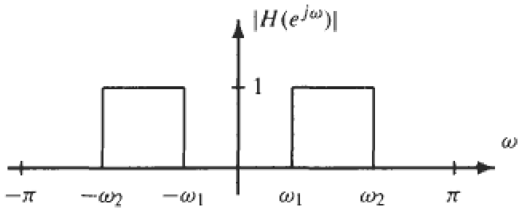
Uygulamalarda önemli olan süzgeçlerin çoğunun parçalı sabit sıklık yanıtı genliklerine sahip olmasıdır. Bunlar Şekil 2.2'de gösterilen alçak geçiren, yüksek geçiren, bant geçiren ve bant durduran süzgeçlerdir. Sıklık yanıtı, genliği 1 olan aralıkta yer alan süzgeç bant geçiren, frekans yanıtı genliği 0 olan aralıkta yer alan süzgeç bant durduran süzgeç olarak adlandırılır. Bant geçiren ve bant durduran süzgeçlerin kenar sıklıkları kesim sıklıklarıdır.



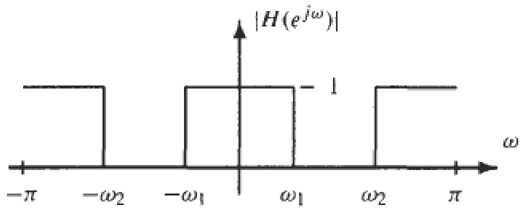
(a) Ideal alçak geçiren süzgeç.



(b) Ideal yüksek geçiren süzgeç.



(c) Ideal bant geçiren süzgeç.



(d) Ideal bant durduran süzgeç.

ŞEKİL 2.2. İdeal süzgeçler.

2.4. SİSTEMLERİN BAĞLANMASI

Süzgeçler çoğunlukla istenilen özelliklere sahip sistemlerin oluşturulmasında kullanılır. Seri (ardışıl) ve paralel olmak üzere iki tip bağlantı vardır. İki DKD sistemin ardışıl bağlantısı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

ŞEKİL 2.3

Ardışıl bağlantı, birim örnek yanıtı ve sıklık yanıtına sahip tek bir kayma ile değişmez sistem ile gösterilebilir.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$$

Ardışıl bağlantının log genliği, teker teker sistemlerin log genliklerinin toplamıdır.

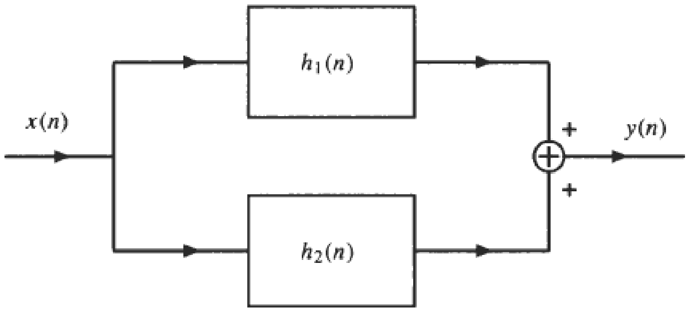
$$20\log\left|H(e^{j\omega})\right| = 20\log\left|H_1(e^{j\omega})\right| + 20\log\left|H_2(e^{j\omega})\right|$$

Evre ve grup gecikmeleri toplanabilir işlevlerdir.

$$\emptyset(\omega) = \emptyset_1(\omega) + \emptyset_2(\omega)$$

$$\tau(\omega) = \tau_1(\omega) + \tau_2(\omega)$$

İki DKD sistemin paralel bağlantısı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



ŞEKİL 2.4

Bir paralel ağ, birim örnek yanıtına sahip tek bir DKD sisteme eşdeğerdir.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

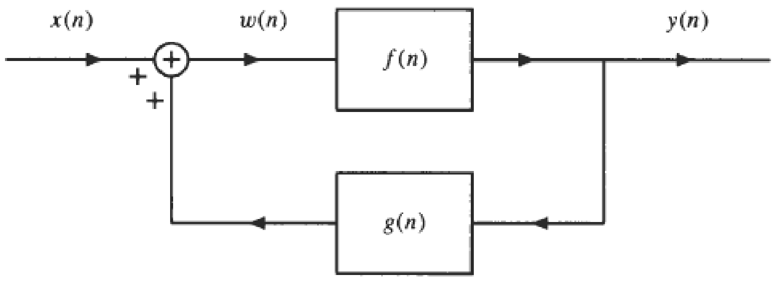
Bu nedenle, paralel ağın frekans yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$

şeklindedir.

ÖRNEK 2.4. Bir yüksek geçiren süzgeç ile bir alçak geçiren süzgeçin ardışıl bağlanması ile bir bant geçiren süzgeç elde edilebilir. Örneğin, Şekil 2.2.c'de gösterilen ideal bant geçiren süzgeç kesim sıklığı ω_1 olan bir alçak geçiren süzgeç ile kesim sıklığı ω_2 olan bir yüksek geçiren süzgeçin ardışıl bağlanması ile gerçeklenebilir. Benzer şekilde, Şekil 2.2.d'de verilen bant durduran süzgeç $\omega_1 > \omega_2$ olmak koşulu ile kesim sıklığı ω_1 olan bir alçak geçiren süzgeç ile kesim sıklığı ω_2 olan bir yüksek geçiren süzgeçin paralel bağlanması ile gerçeklenebilir.

Diğer bir bağlantı şekli, çoğunlukla kontrol uygulamalarında kullanılan geri beslemeli ağ aşağıdaki şekilde verilmiştir.



ŞEKİL 2.5

Bu ağ şu şekilde analiz edilebilir.

$$\omega(n) = x(n) + g(n) * y(n)$$

$$y(n) = f(n) * \omega(n)$$

Eğer gerçekleniyorsa[2], aşağıdaki bölümde tanımlanacak olan Fourier analiz teknikleri ile bu sistemin sıklık yanıtını bulunabilir.

[2] g(n)'in sistemi kararsız yapabilmesi olasıdır. Bu durumda, h(n)'in AZFD'si alınamaz. Geri beslemeli sistem genelde z-dönüşümü kullanılarak analiz edilir.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - F(e^{j\omega})G(e^{j\omega})}$$

2.5. AYRIK-ZAMAN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Bir DKD sistemin sıklık yanıtı, h(n)'in bir $e^{-j\omega}$ exponansiyel terimle çarpılarak n üzerinden toplamı ile bulunabilir. Bir dizinin ayrık zaman Fourier dönüşümü (AZFD), x(n), aynı yolla tanımlanır.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega} \qquad (2.3)$$

Böylece, bir DKD sistem $H(e^{j\omega})$'nın sıklık yanıtı, birim örnek yanıtı h(n)'in AZFD'sidir. Bir dizinin AZFD'sinin alınabilmesi için, Eşitlik 2.3'deki toplamın yakınsaması zorunludur. Bu da, x(n)'in mutlak toplanır olmasını gerektirir.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = S < \infty$$

ÖRNEK 2.5. Bir dizi $x_1(n)$'in

$$x_1(n) = \alpha^n u(n) \qquad |\alpha| < 1$$

AZFD,

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n$$

şeklindedir. Geometrik serileri kullanarak, toplam $|\alpha| < 1$'i sağlamak koşuluyla

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, r dizi $x_2(n)$'in

$$x_2(n) = -\alpha^n u(-n-1) \qquad |\alpha| > 1$$

AZFD,

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n\, e^{-j\omega n}$$

şeklindedir. Toplamın limitleri değiştirildiğinde

$$X_2(e^{j\omega}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} e^{j\omega n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{-1} e^{j\omega}\right)^n + 1$$

bulunur. Eğer $|\alpha| > 1$ ise, bu toplam

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha^{-1} e^{j\omega}} + 1 = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

şeklinde yazılır. Verilen $X(e^{j\omega})$ için x(n) dizisi ters AZFD kullanılarak yeniden elde edilir.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega \qquad (2.4)$$

Ters AZFD, $-\pi < \omega \leq \pi$ aralığındaki sıklıklarda tüm karmaşık üstellerin doğrusal katışımı olarak tanımlanabilir. Çizelge 2.1'de en çok kullanılan bazı AZFD'lerin listesi verilmiştir.

Çizelge 2.1. Bazı AZFD çiftleri

Dizi	**AZFD**
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{j\omega n_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$a^n u(n) \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u(-n-1) \quad \lvert a\rvert > 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$(n+1)a^n u(n) \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$\cos(n\omega_0)$	$\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

ÖRNEK 2.6. Farzedelim ki $X(e^{j\omega})$, $\omega = \omega_0$ sıklığında bir dürtü işlevi olsun.

$$X(e^{j\omega}) = \delta(\omega-\omega_0)$$

Ters AZFD'yi kullanarak

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{jn\omega_0}$$

bulunur. Burada, x(n)'in mutlak toplanır olmamasına rağmen, AZFD'sinin dürtü işlevlerini içermesinden dolayı karmaşık üstellere sahip dizilerin AZFD'sinin göz önüne alınması gerektiği belirtilmelidir. Diğer bir örnek, eğer

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

ise, ters AZFD

$$x(n) = \frac{1}{2}e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-jn\omega_0} = \cos(n\omega_0)$$

şeklinde hesaplanır.

2.6. AZFD'NİN ÖZELLİKLERİ

AZFD ve ters AZFD'nin değerlendirilmesinde kullanılan birçok AZFD özelliği vardır. Bunlardan bazıları aşağıda tanımlanmıştır. AZFD'nin özelliklerinin özeti Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Dönemsellik

AZFD; dönemi, ω, 2π olan dönemli bir dönüşümdür.

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

Bu özellik, AZFD’nin tanımı ve karmaşık üstellerin dönemsellik özelliği kullanılarak gösterilir.

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\omega} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jn\omega} = X(e^{j\omega})$$

Çizelge 2.2. Bazı AZFD çiftleri

Özellik	**Dizi**	**AZFD**
Doğrusallık	ax(n)+by(n)	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Kayma	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Zaman tersinimi	x(-n)	$X(e^{-j\omega})$
Kiplenim	$e^{jn\omega_0} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Evrişim	x(n)*y(n)	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Birletim	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Türev	nx(n)	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Çarpma	x(n)y(n)	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Simetri

AZFD, ters AZFD ve AZFD’yi basitleştirilebildiği bazı özelliklere sahiptir. Bu özellikler aşağıdaki çizelgede listelenmiştir.

x(n)	$X(e^{j\omega})$
Gerçel ve çift	Gerçel ve çift
Gerçel ve tek	Sanal ve tek
Sanal ve çift	Sanal ve çift
Sanal ve tek	Gerçel ve tek

Burada özelliklerin birleştirilebileceği hatırlatılmalıdır. Örneğin; x(n) eşlenik simetrik ise, bu işlevin gerçel kımı çift ve sanal kısmı tektir. Bu nedenle, $X(e^{j\omega})$ gerçel değerlidir. Benzer şekilde, eğer x(n) gerçel ise, $X(e^{j\omega})$’in gerçel kısmı çift, sanal kısmı tektir. Böylece, $X(e^{j\omega})$ eşlenik simetriktir.

Doğrusallık

AZFD, doğrusal bir işleçtir. Yani; eğer $X_1(e^{j\omega})$, $x_1(n)$'in ve $X_2(e^{j\omega})$ $x_2(n)$'in AZFD ise

$$ax_1(n) + bx_2(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

şeklindedir.

Kaydırma Özelliği

Zamanda bir diziyi kaydırma, sıklık ortamında (doğrusal evre terimli) karmaşık üstel ile çarpmaya karşılık gelir.

$$x(n - n_0) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Zamanda Tersine Çevirme

Zamanda bir diziyi tersine çevirme işlemi, sıklıkta da tersine çevirme işlemine karşılık gelir.

$$x(-n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

Kiplenim

Bir dizi bir karmaşık üstel ile çarpıldığında bu işlem sıklıkta, AZFD'nin sıklıkta kaydırılmasına karşılık gelir.

$$e^{jn\omega_0}x(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Böylece ω_0 sıklığı ile kiplenmiş bir dizi, ω_0 tarafında sıklık izgesi yukarı ve aşağı kaydırılmıştır.

$$x(n)\cos(n\omega_0) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

Evrişim Kuramı

Doğrusal sistemler kuramının belkide en önemli sonucu, zamanda evrişimin sıklıkta çarpmaya karşılık gelmesidir. Özellikle bu kuram, evriştirilmiş x(n) ve h(n) dizilerinin AZFD'sinin bu x(n) ve h(n) dizilerinin AZFD'sinin çarpımı olduğunu gösterir.

$$h(n) * x(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Çoğalım (Dönemsel Evrişim) Kuramı

Zamanda kaydırma ve evrişim özellikleri, evrişim kuramının iki yönlülüğünün bir sonucudur. Yani zaman ortamında çoğalım, sıklık ortamında (dönemsel) evrişimle ilişkilidir.

$$x(n)y(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$

Parseval'in Kuramı

Çoğalım kuramının doğal sonucu Parseval kuramıdır.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

Parseval'in kuramı enerjinin korunumu kuramını işaret eder. Çünkü bu kuram, AZFD işleci, zaman ortamından frekans ortamına geçerken enerjinin korunduğunu gösterir.

2.7. UYGULAMALAR

Bu bölümde, ayrık zaman im analizinde bazı AZFD uygulamaları verilecektir. Bunlar, sıfır ilk koşullu, ters tasarımlı sistemlere sahip fark eşitliklerinin çözümü, evrişim uygulamaları tarafından DZD bir sistemin sıklık yanıtının bulunmasını içerir.

2.7.1. DZD Sistemler ve Doğrusal Sabit Katsayılı Fark Eşitliği (DSKFE)

Giriş x(n) ve çıkış y(n)'i içeren DZD sistemlerin önemli bir alt sınıfı, bir DSKFE ile ilişkilidir.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) \tag{2.5}$$

AZFD'nin doğrusallık ve kaydırma özelliği, sıklık ortamında fark eşitliğinin açıklamasında aşağıdaki gibi

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = -\sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}Y\left(e^{j\omega}\right) + \sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

veya

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}\right] = X\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk\omega}$$

şeklinde kullanılır. Böylece, sistemin sıklık yanıtı

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk\omega}}{1+\sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK 2.6. İkinci dereceden DSKFE tarafından betimlenen DKD sistemi göz önüne alalım.

$$y(n) = 1.3433y(n-1) - 0.9025y(n-2) + x(n) - 1.4142x(n-1) + x(n-2)$$

Sıklık yanıtı, h(n) için fark eşitliği çözülmeden aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - 1.4142e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 1.3433e^{-j\omega} + 0.9025e^{-2j\omega}}$$

Bu sorunun ters yönde çalıştırılabileceği akılda tutulmalıdır. Örneğin, aşağıdaki gibi sıklık yanıtı verilen sistemde, sistemin gerçeklenmesini sağlayacak bir fark eşitliği kolaylıkla bulunabilir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{2 - e^{-j\omega} + 0.5e^{-2j\omega}}$$

Önce pay ve payda ikiye bölünür ve sıklık yanıtı aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.5 + 0.5e^{-2j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega} + 0.25e^{-2j\omega}}$$

Böylece sistemin fark eşitiliği

$$y(n) = 0.5y(n-1) - 0.25y(n-2)0.5x(n) + 0.5x(n-2)$$

şeklinde elde edilir.

2.7.2. Evreşimlerin Başarımı

AZFD'de zaman ortamında evrişim, frekans ortamında çarpma işlemine karşılık geldiği için AZFD, zaman ortamında evreşimlerin başarımına bir seçenek sağlar. Bir sonraki örnek bu yordamı gösterir.

ÖRNEK 2.7. Bir DKD sistemin birim örnek yanıtı

$$h(n) = \alpha^n u(n)$$

Şeklinde ise, x(n)=$\beta^n u(n)$ girişine karşı sistemin yanıtını bulalım, burada $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$, ve $\alpha \neq \beta$'dır. Sistemin çıkışı x(n) ve h(n)'in evrişimidir.

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

y(n)'in AZFD

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

şeklindedir. Böylece $Y(e^{j\omega})$'nin ters AZFD bulunarak gerekli tüm değerler elde edilir. Bu da kolayca $Y(e^{j\omega})$'nin genişletilmesiyle aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

Burada, A ve B bulunması gereken sabitlerdir. Payda eşitlemesi ile eşitliğin sağ tarafı genişletildiğinde

$$\frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} = \frac{(A + B) - (A\beta + B\alpha)e^{-j\omega}}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

elde edilir ve katsayıların eşitlenmesiyle, A ve B sabitli eşitlik parçaları çözülerek

$$A + B = 1$$

$$A\beta + B\alpha = 0$$

şeklinde yazılır. Sonuç

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \qquad B = \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - \frac{\frac{\beta}{\alpha - \beta}}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

formundadır. Böylece, ters AZFD alınarak y(n) aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(n) = \left[\frac{\alpha}{\alpha - \beta}\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha - \beta}\beta^n\right]u(n)$$

2.7.3. Fark Eşitliklerinin Çözümü

Bölüm 1'de zaman bölgesinde fark eşitliklerinin çözümü üzerine yöntemler gözden geçirilmişti. AZFD, sıklık bölgesinde ilk koşullar sıfır alınarak fark eşitliklerinin çözümünde kullanılabilir. Yordam, sıklık bölgesinde fark eşitliğinin her bir teriminin AZFD'sinin alınması, istenilen terimlerin çözümlenmesi ve ters AZFD alınarak bilinmeyen terimlerin zaman ortamında elde edilmesi şeklindedir.

ÖRNEK 2.8. y(n)'in ilk koşullarını sıfır alarak, aşağıda verilen DSKFE'yi $x(n) = \delta(n)$ için çözelim.

$$y(n) - 0.25y(n-1) = x(n) - x(n-2)$$

Önce fark eşitliğindeki her terim için AZFD'yi hesaplıyalım.

$$Y(e^{j\omega}) - 0.25e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - e^{-2j\omega}X(e^{j\omega})$$

Çünkü, x(n)'in AZFD $X(e^{j\omega}) = 1$'dir.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} - \frac{e^{-2j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Aşağıda verilen AZFD eşitliği kullanılarak

$$(0.25)^n x(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

$Y(e^{j\omega})$'nin ters AZFD'si, doğrusallık ve kaydırma özelliklerinden faydalanılarak kolaylıkla bulunabilir.

$$y(n) = (0.25)^n u(n) - (0.25)^{n-2} u(n-2)$$

2.7.4. Ters Sistemler

Birim örnek yanıtı h(n) olan bir sistemin tersi birim örnek yanıtı g(n) aşağıdaki gibi verilen bir sistemdir.

$$h(n) * g(n) = \delta(n)$$

Sıklık yanıtı açısından eğer $H(e^{j\omega})$'nın tersi varsa

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Yalnız dikkat edilmesi gereken nokta, tüm sistemlerin tersinin alınabilir olmadığı yada tersi alınsa bile sistemin nedensel olmayabileceğidir. Örneğin; Örnek 2.2'de verilen ideal alçak geçiren süzgeçin tersi yoktur ve sistemin tersi

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega}$$

iken

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2e^{-j\omega}}$$

şeklindedir. Bu da, nedensel olmayan birim örnek yanıtına sahip bir sistemle ilişkilidir.

$$g(n) = (-2)^n u(-n-1)$$

ÖRNEK 2.9. Bir DKD sistemin sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

ise, bu sistemin tersi

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

şeklindedir ve birim örnek yanıtı

$$g(n) = (0.25)^n u(n) - 0.5(0.25)^{n-1}u(n-1)$$

elde edilir.

ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

P2.1. h(n) bir DKD sistemin birim örnek yanıtı olsun. Sıklık yantını

(a) $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) - 3\delta(n-2)$

(b) $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u(n-2)$

için bulunuz.

(a) Bu sistemin birim örnek yanıtı sonlu uzunlukludur. Bu nedenle sıklık yanıtı, çok terimli işlev katsayıları h(n)'in değerlerine eşit olan $e^{j\omega}$'nın bir çok terimli işlevidir.

$$H(e^{j\omega}) = 1+6e^{-j\omega}+3e^{-2j\omega}$$

Bu, biçimsel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)]e^{-jn\omega}$$

Çünkü

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0)e^{-jn\omega} = e^{-jn_0\omega}$$

ve

$$H(e^{j\omega}) = 1+6e^{-j\omega}+3e^{-2j\omega}$$

şeklindedir.

(b) İkinci sistem için, sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} e^{-jn\omega}$$

şeklindedir. Başlangıç değeri n=0 alarak toplamda limitler değiştirildiğinde

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+4} e^{-j(n+2)\omega} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{-2j\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n$$

elde edilir. Geometrik diziler kullanılarak

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{-2j\omega} \frac{e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

bulunur.

P2.2. Bir L'inci dereceden yürüyen ortalamalı süzgeç x(n) girişi için

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} x(n-k)$$

çıkışını veren bir DZD sistemdir. Bu sistemin sıklık yanıtını bulun.

Eğer yürüyen ortalamalı süzgeçin girişi x(n)=δ(n) ise, tanımdan dolayı yanıt h(n), birim örnek yanıtı olacaktır. Bu nedenle

$$h(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} \delta(n-k)$$

ve

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} e^{-jk\omega}$$

şeklindedir. Geometrik diziler kullanılarak

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\cdot\frac{1-e^{-j(L+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

bulunur. Payda yer alan terim ve paydada yer alan terim çarpanlarına ayrılarak

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\cdot e^{-jL\omega/2}\cdot\frac{e^{j(L+1)\omega/2}-e^{-j(L+1)\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

veya $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\cdot e^{-jL\omega/2}\cdot\frac{\sin[(L+1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)}$

elde edilir.

P2.3. Bir DKD bir sistemin girişi

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{3n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

şeklindedir. Eğer sistemin birim örnek yanıtı

$$h(n) = 2\cdot\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{(n-1)\pi}$$

ise, çıkışı bulun.

Bu problem DKD sistemin özişlev özelliği kullanılarak çözülebilir. Özellikle Örnek 2.2'den görüleceği gibi eğer DKD sistemin girişi $x(n)=\cos(n\omega_0)$ ise, yanıt

$$y(n) = \left|H(e^{j\omega_0})\right| \cos[n\omega_0 + \phi_h(\omega_0)]$$

olacaktır. Bu nedenle, sistemin sıklık yanıtı bulunmalıdır. Örnek 2.3'te, bir alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

olarak gösterilmiştir. Burada

$$h_1(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n}$$

şeklindedir. Çünkü $\omega_c=\pi/2$ olmak üzere $h(n)=2h_1(n-1)$, ifade $H_1(e^{j\omega})$ yoluyla $H(e^{j\omega})$'den aşağıdaki gibi türetilir.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=2}^{\infty} 2h_1(n-1)e^{-jn\omega} = 2\sum_{n=2}^{\infty} h_1(n)e^{-j(n+1)\omega}$$

$$= 2e^{-j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)e^{-jn\omega} = 2e^{-j\omega}H_1(e^{j\omega})$$

Böylece, $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2e^{-j\omega}, & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$'dir. Çünkü, $\omega=3\pi/4$'te, $|H(e^{j\omega})| = 0$'dır. x(n)'de sinüs süzgeçten geçirilir ve basitçe çıkış

$$y(n) = 2|H(e^{j\pi/4})|\cos\left[\frac{n\pi}{4} + \emptyset_h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4cos\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 4cos\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right]$$

bulunur.

P2.4. Aşağıdaki birim örnek yanıtına sahip bir sistemin genlik, evre ve grup gecikmesini bulunuz (burada α, gerçel bir değerdir).

$$h(n) = \delta(n) + \alpha\delta(n-1)$$

Bu sistemin sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \alpha e^{-j\omega} = 1 - \alpha\cos\omega + j\alpha\sin\omega$$

şeklindedir. Bu nedenle, genliğinin karesi

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = (1-\alpha e^{-j\omega}) \cdot (1-\alpha e^{-j\omega}) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega$$

olarak bulunur. Evresi ise

$$\emptyset_h(\omega) = \tan^{-1}\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\frac{\alpha\sin\omega}{1 - \alpha\cos\omega}$$

şeklindedir. Sonuç olarak, grup gecikmesi evresinin türevi alınarak bulunabilir (Problem 2.19'a bakınız). Başka bir seçenek olarak, bu sistem Örnek 2.2.2'de gösterilen sistemin tersidir, evre ve grup gecikmesi örnekte elde edilen değerlerin tersidir. Bu nedenle grup gecikmesi

$$\tau(\omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha\cos\omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}$$

şeklindedir.

P2.5. 90° evre kaydırıcı, aşağıda verilen sıklık yanıtına sahip bir sistemdir. Bu sistemde, tüm ω'lar için genlik sabittir ve evre, $-\pi < \omega < 0$ için π/2 ve $0 < \omega < \pi$ için -π/2'dir. Bu sistemin birim örnek yanıtını bulun.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega \le \pi \\ j, & -\pi < \omega \le 0 \end{cases}$$

Birim örnek yanıtı tümlev alınarak bulunabilir.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} j\, e^{jn\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} j\, e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi n} e^{jn\omega}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi n} e^{jn\omega}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\left[1 - e^{-jn\pi}\right] - \frac{1}{2\pi n}\left[e^{-jn\pi} - 1\right] = \frac{1}{\pi n}\left[1 - e^{-jn\pi}\right] = \frac{1}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Bu nedenle,

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \quad \text{odd} \\ 0, & n \quad \text{even} \end{cases}$$

şeklindedir ve burada h(n) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Süzgeçler

P2.6. h(n), kesim sıklığı ω_c olan bir alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı olsun.

(a) Hangi tip süzgeçin birim örnek yanıtı $g(n) = (-1)^n h(n)$'dir?

(b) Eğer h(n) birim örnek yanıtı h(n) olan bir süzgeç aşağıda verilen fark eşitliği ile gerçeklenebiliyorsa, birim örnek yanıtı $g(n) = (-1)^n h(n)$ olan bir sistemi gerçeklemek için verilen bu fark eşitiliği nasıl değiştirilmelidir?

$$y(n) = \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) \qquad (2.7)$$

(a) Verilen $g(n) = (-1)^n h(n)$ ifadesinde $G(e^{j\omega})$'nin sıklık yanıtı alçak geçiren süzgeçin sıklık yanıtı $H(e^{j\omega})$ ile ilişkilidir.

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn(\omega-\pi)} = H(e^{-j(\omega-\pi)})$$

Bu nedenle $G(e^{j\omega})$, sıklıkta $H(e^{j\omega})$'nın π kadar kaydırılmış şeklidir. Böylece eğer alçak geçiren süzgeçin geçirme kuşağı (passband) $|\omega| \le \omega_c$ ise, $G(e^{j\omega})$'nin geçirme kuşağı $\pi - \omega_c < |\omega| \le \pi$ olacaktır. Sonuç olarak, g(n) bir yüksek geçiren süzgeçin birim örnek yanıtıdır.

(b) Eğer birim örnek yanıtı h(n) olan bir süzgeç, Eşitlik 2.7 ile verilen fark eşitliği ile gerçeklenebiliyorsa bu süzgeçin sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk\omega}}{1 - \sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}}$$

şeklindedir. h(n) ifadesi $(-1)^n$ ile çarpılırsa sıklık yantı

$$G(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)}) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk(\omega-\pi)}}{1-\sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk(\omega-\pi)}}$$

olan bir sistem elde edilir. Çünkü $e^{jk\pi} = (-1)^k$'dır.

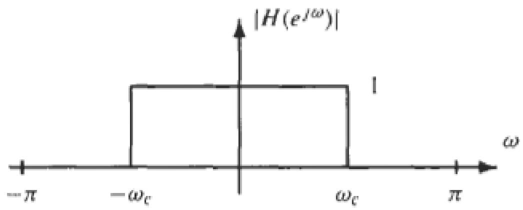
$$G(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{q}(-1)^k b(k)e^{-jk\omega}}{1-\sum_{k=1}^{p}(-1)^k a(k)e^{-jk\omega}}$$

Fark eşitliği ise

$$y(n) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^k a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{q}(-1)^k b(k)x(n-k)$$

şeklindedir. Yani k'nın tek değerleri için a(k) ve b(k) katsayıları geçersizdir (belkide burada negatifleştirmek anlamındadır).

P2.7. $H(e^{j\omega})$, kesim sıklığı ω_c olan bir ideal alçak geçiren süzgeçin sıklık yanıtı olsun. Sıklık yanıtının grafiği aşağıda verilmiştir. Ayrıca bu süzgeçin evresinin doğrusal olduğunu varsayalım. Yani, $\phi_h(\omega) = -n_0\omega$'dır. Aşağıdaki çıkışı üretebilecek kesim sıklığı $\omega_c < \pi$ olan bir x(n) girişi olup olmadığını bulun.



$$y(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \cdots, 20 \\ 0, & n \text{ diğer yerlerde} \end{cases}$$

Eğer $X(e^{j\omega})$, x(n)'in AZFD ise, alçak geçiren süzgeçin çıkışı

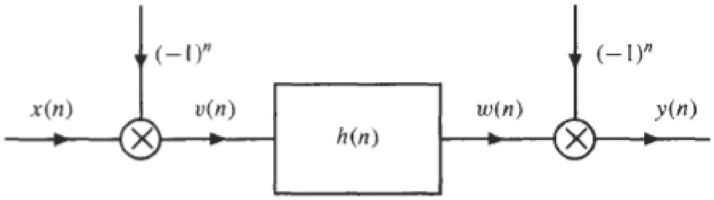
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

olacaktır. Bu nedenle $Y(e^{j\omega})$, $\omega_c < |\omega| \leq \pi$ için sıfır olmak zorundadır. Ayrıca y(n)'in AZFD

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{20} e^{jn\omega} = \frac{1-e^{-21j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$\omega_c < |\omega| \leq \pi$ için sıfır değildir. Bu nedenle, $\omega_c < \pi$ için bir değer yoktur ve verilen y(n) çıkışını üretebilecek bir x(n) girişi yoktur.

P2.8. h(n) kesim sıklığı $\omega_c=\pi/4$ olan bir ideal alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı olsun. Aşağıda verilen öbek şemada bir DKD sistem, bir alçak geçiren süzgeç ve iki kipleyicinin ardışıl bağlanması ile gösterilmiştir. Giriş x(n) ve çıkış y(n) ile bağlantılı tüm sistemin frekan yanıtını bulun.



Bu sistemin sıklık yanıtını bulmanın iki yolu vardır. İlki için alçak geçiren süzgeçin girişi $(-1)^n x(n)$ olmak üzere çıkışı

$$\omega(n) = h(n) * [(-1)^n x(n)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)(-1)^{n-k} x(n-k)$$

şeklindedir.

$$y(n) = (-1)^n \omega(n) = (-1)^n \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)(-1)^{n-k} x(n-k) \right\}$$

olmak üzere $(-1)^n$ terimi toplamdan dışarı çıkarıldığında ve $(-1)^{n-k} = (-1)^{k-n}$ kullanıldığında

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)(-1)^n(-1)^{k-n} x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(k) x(n-k) = [(-1)^n h(n)] * x(n)$$

elde edilir. Böylece tüm sistemin birim örnek yanıtı $(-1)^n h(n)$'dir ve sıklık yanıtı

$$\text{AZFD}\{(-1)^n h(n)\} = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{3\pi}{4} \le |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir. Sıklık yanıtını elde etmenin diğer bir yolu sistemin karmaşık üstel, $x(n) = e^{jn\omega}$ yanıtını bulmaktır. Bu dizi $(-1)^n = e^{-jn\pi}$ ile kipleyerek bulunur. Bu da

$$v(n) = (-1)^n e^{-jn\pi} = e^{j(\omega-\pi)}$$

şeklindedir ve DZD sistemin girişidir. Çünkü v(n) karmaşık üsteldir ve bu v(n) girişine karşı sistemin yanıtı

$$w(n) = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) e^{j(\omega-\pi)}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$y(n) = (-1)^n w(n) = (-1)^n H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) e^{j(\omega-\pi)} = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) e^{j\omega n}$$

olduğu için, tüm sistemin sıklık yanıtı $H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$'dir.

P2.9. Eğer h(n) kesim sıklığı $\omega_c = \pi/4$ olan bir ideal alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı ise, birim örnek yanıtı g(n)=h(2n) olan süzgeçin sıklık yanıtını bulun.

Bu sistemin sıklık yanıtını bulmak için, iki yönlü çözümün biri ile problemi çözmeliyiz. Bunlarda ilki, kesim sıklığı $\omega_c = \pi/4$ olan bir ideal alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtı

$$h(n) = \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi}$$

olduğu için

$$h(2n) = \frac{\sin(2\,n\pi/4)}{2n\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

şeklinde ifade edilir. Burada; h(2n), genliği 1/2 ve kesim sıklığı ω_c=π/2 olan bir alçak geçiren süzgeçin birim örnek yanıtıdır. Bu problemi çözmek için kullanılacak ikinci yol, $H(e^{j\omega})$ birim örnek yanıtı h(n) olan bir sistemin sıklık yanıtı olmak üzere, g(n)=h(2n) birim örnek yanıtına sahip sistemin sıklık yanıtını bulmaktır. Bu çözüm, ilk yaklaşıma göre daha fazla zorluk içermesine rağmen, herhangi bir sisteme uygulanan $H(e^{j\omega})$ ile $G(e^{j\omega})$ sıklık yanıtı için daha genel bir söylem verebilmektedir. Sıklık yanıtını bulabilmek için, toplam ifadesini irdelemek gerekir.

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega}$$

Aşağıdaki özdeşliği kullanarak

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n\ \text{çift} \\ 0 & n\ \text{tek} \end{cases}$$

sıklık yanıtı şu şekilde yazılabilir.

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1 + (-1)^n]h(n)e^{-jn\omega/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega/2} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h(n)e^{-jn\omega/2}$$

$H(e^{j\omega})$ ile, ilk terim

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega/2} = \frac{1}{2}H(e^{j\omega/2})$$

ve

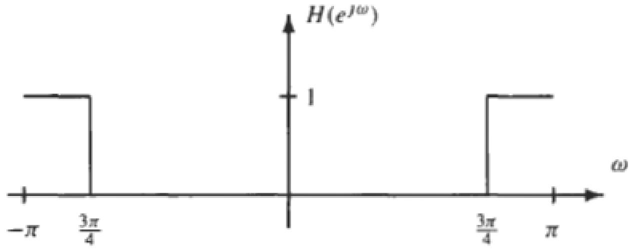
$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h(n)e^{-jn\omega/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn(\omega+2\pi)/2} = \frac{1}{2}H(e^{j(\omega+2\pi)/2})$$

yeniden yazılırsa

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}H(e^{j\omega/2}) + H(e^{j(\omega+2\pi)/2})$$

elde edilir. Kesim sıklığı ω_c=π/4 olan bir ideal alçak geçiren süzgeçin sıklık yanıtı $H(e^{j\omega})$ alındığında bir önceki sonuç elde edilir.

P2.10. Kesim sıklığı ω_c=3π/4 olan bir ideal yüksek geçiren süzgeç aşağıda gösterilmiştir.



(a) Birim örnek yanıtı h(n)'ni bulun.

(b) Birim örnek yanıtı $h_1(n) = h(2n)$ olan yeni bir sistem tanımlanmış olsun. Bu sistemin $H_1(e^{j\omega})$ sıklık yanıtını çizin.

(a) Birim örnek yanıtı iki farklı yolla bulunabilir. İlki ters AZFD'yi kullanmak ve tümlev kullanmaktır. İkinci yaklaşım ise kipleme özelliğinin kullanılmasıdır. Burada eğer

$$H_{ag}(e^{j\omega})=\begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \text{ için} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ise $H(e^{j\omega})$'nın yeniden aşağıdaki gibi yazılabileceği

$$H(e^{j\omega}) = H_{ag}\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

belirtilmelidir. Bu nedenle, kiplenim özelliğinden

$$h(n) = e^{jn\pi} h_{ag}(n) = (-1)^n h_{ag}(n)$$

$$h_{ag}(n) = \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi}$$

$$h(n) = (-1)^n \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi}$$

bulunur.

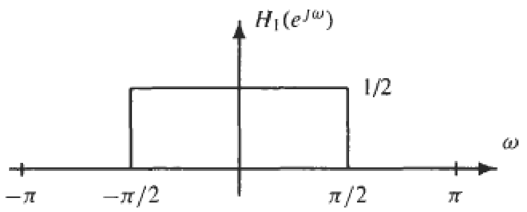
(b) Birim örnek yanıtı $h_1(n) = h(2n)$ olan sistemin yanıtı doğrudan AZFD kullanılarak bulunabilir.

$$H_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n) e^{-jn\omega} = \sum_{n \text{ çift}} h(n)\, e^{-jn\omega/2}$$

Bunun yanında kolay bir yaklaşımın, kesim sıklığı π/2 ve kazancı 1/2 olan bir alçak geçiren süzgeç

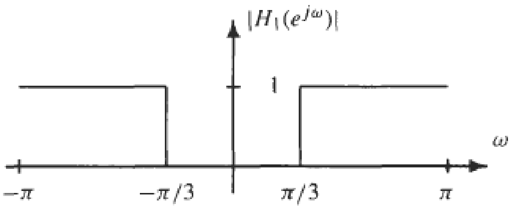
$$h_1(n) = h(2n) = (-1)^{2n} \frac{\sin(2n\pi/4)}{2n\pi} = \frac{\sin(n\pi/2)}{2n\pi}$$

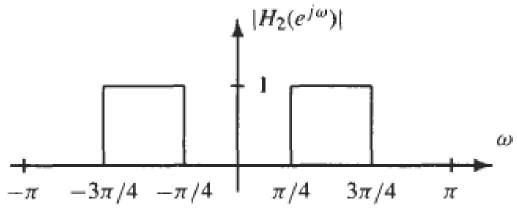
olduğu gösterilebilir.



Sistemin Ara Bağlantıları

P2.11. Aşağıda sıklık yanıtları verilen ideal süzgeçler ardışıl olarak bağlanmıştır.





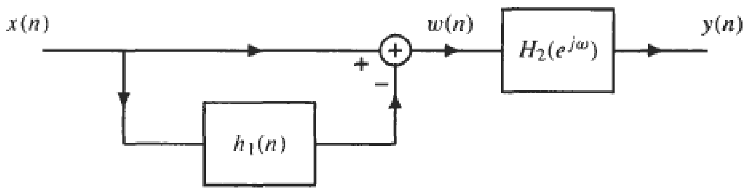
Keyfi bir giriş x(n) için, y(n) çıkışının sıklık aralığını bulun. Aynı işlemi iki sistem paralel bağlandığında tekrar edin.

Eğer iki süzgeç ardışıl bağlanmış ise, ardışık sistemin sıklık yantı

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$

şeklindedir. Bu nedenle, y(n) girişindeki herhangi bir sıklık iki süzgeçten de geçmek zorundadır. Çünkü $H_1(e^{j\omega})$ için bant geçirme aralığı $|\omega| > \pi/3$, $H_2(e^{j\omega})$ için bant geçirme aralığı $\pi/4 < |\omega| < \pi/3$ ve ardışık sitem için bant geçirme aralığı ($H_1(e^{j\omega})$ ve $H_2(e^{j\omega})$ her ikisi için sıklık '1'e eşittir) $\pi/3 < |\omega| < 3\pi/4$'tür. Paralel bağlantıda, tüm sıklık yanıtı $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$'ya eşittir. Bu nedenle sıklıklar çıkışa, süzgeçlerin ya birinden ya da diğerinden geçerek ulaşırlar. Yani $|\omega| > \pi/4$'tür.

P2.12. Aşağıda verilen ara bağlantılı DKD sistemleri ele alalım.



Burada; $h_1(n) = \delta(n-1)$ ve $H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$'dir. Bu sistemin sıklık yanıtı ve birim örnek yanıtını bulun.

Birim örnek yanıtını bulabilmek için $x(n) = \delta(n)$ alalım. Toplayıcının çıkışı

$$w(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

şeklindedir. Çünkü $w(n)$ birim örnek yanıtı $h_2(n)$ olan bir DKD sistemin girişidir.

$$w(n) = h_2(n) - h_2(n-1)$$

Burada; $h_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$'dir. Sıklık yanıtını bulurken

$$W(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$$

kullanılır. Böylece

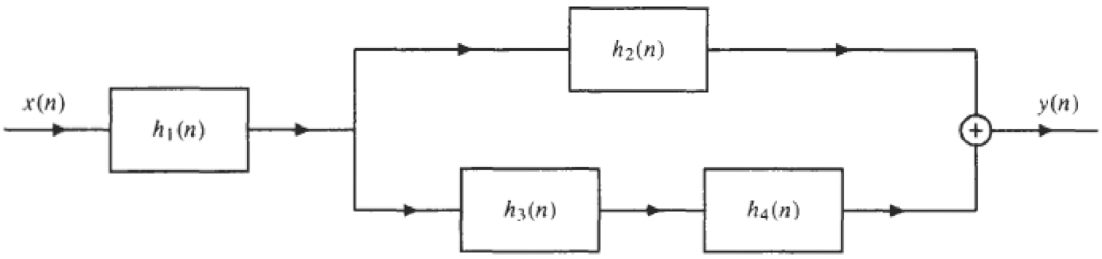
$$H(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) = [1 - e^{-j\omega}]H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j\omega} & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

elde edilir.

P2.13. Aşağıda verilen ara bağlantılı DKD sistemleri ele alalım.

(a) Tüm sistemin sıklık yanıtını $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, $H_3(e^{j\omega})$ ve $H_4(e^{j\omega})$ cinsinden ifade edin.

(b) Eğer



$\mathrm{h}_1(\mathrm{n}) = \delta(\mathrm{n}) + 2\delta(\mathrm{n}-2) + \delta(\mathrm{n}-4)$
$\mathrm{h}_2(\mathrm{n}) = \mathrm{h}_3(\mathrm{n}) = (0.2)^{\mathrm{n}}\mathrm{u}(\mathrm{n})$
$\mathrm{h}_4(\mathrm{n}) = \delta(\mathrm{n}-2)$
ise sıklık yanıtını bulun.

(a) $\mathrm{h}_2(\mathrm{n})$, ardışıl bağlı $\mathrm{h}_3(\mathrm{n})$ ve $\mathrm{h}_4(\mathrm{n})$ ile paralel bağlı olduğu için paralel ağın sıklık yanıtı

$$\mathrm{G}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \mathrm{H}_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{H}_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

şeklindedir. $\mathrm{h}_1(\mathrm{n})$, g(n) ile ardışıl bağlı olduğu için tüm sistemin sıklık yanıtı

$$\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\left[\mathrm{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \mathrm{H}_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{H}_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right]$$

bulunur.

(b) Bu ara bağlantıda sıklık yanıtı

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 1 + 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{j}\omega} = \left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}\right)^2$$

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{H}_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1 - 0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

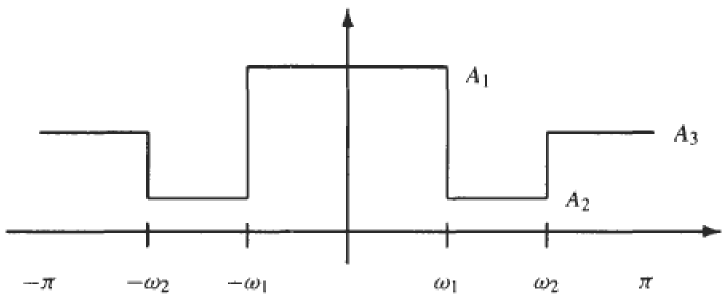
$$\mathrm{H}_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}$$

dir. Bu nedenle

$$\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\left[\mathrm{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \mathrm{H}_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{H}_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right] = \mathrm{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\left[1 + \mathrm{H}_4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right]$$
$$= \frac{\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\right)^3}{1 - 0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

bulunur.

P2.14. Aşağıda şekilde gösterilen DKD sistemin sıklık yanıtının parçalı sabit olduğunu farzedelim.



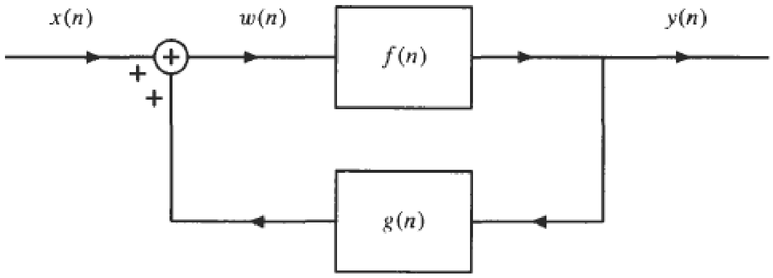
Alçak geçiren süzgeçleri paralel bağlayarak bu süzgeçin nasıl gerçeklenebileceğini tanımlayın.

Bu süzgeç; bir alçak geçiren, bir bant geçiren ve bir yüksek geçiren süzgeçin toplamı olarak gösterilebilir. Çünkü, bant geçiren ve yüksek geçiren süzgeçin her ikisi de alçak geçiren süzgeçlerin paralel bağlantısı kullanılarak sentezlenebilir. Bunu şu sırayla açıklıyabiliriz. Önce, kesim sıklığı ω_2 ve kazancı $A_2 - A_3$ olan bir alçak geçiren süzgeç ile tüm bantları geçiren süzgeç $H_3(e^{j\omega}) = A_3$ paralel bağlanır. Bu paralel ağ aşağıda verilen sıklık yanıtına sahiptir.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} A_2 & |\omega| \leq \omega_2 \\ A_3 & \omega_2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$|\omega| \leq \omega_1$ düşük bantlarda doğru genliği elde edebilmek için diğer iki süzgeçe paralel bir üçüncü alçak geçiren süzgeç eklenir. Bu süzgeçin kesim sıklığı ω_1 ve kazancı $A_1 - A_2$'dir.

P2.15. İki DKD sistemin geri beslemeli ağ ile bağlanmış formu aşağıda verilmiştir.



$H(e^{j\omega})$ var ve bütün sistemin kararlı olduğunu varsayalım. Bu geri beslemeli ağın sıklık yanıtının

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - F(e^{j\omega})G(e^{j\omega})}$$

olduğunu gösterin.

Analize başlamadan önce bir imin aşağıdaki gibi yazılabileceği belirtilmelidir.

$$w(n) = x(n) + g(n) * y(n)$$

Sıklık düzleminde bu ifade

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + G(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

şeklindedir. Çünkü, $Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})W(e^{j\omega})$'dir ve $Y(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega})[X(e^{j\omega}) + G(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})]$ formundadır. $Y(e^{j\omega})$ çözülmesiyle

$$H(e^{j\omega}) = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - F(e^{j\omega})G(e^{j\omega})} X(e^{j\omega})$$

bulunur. Böylece sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - F(e^{j\omega})G(e^{j\omega})}$$

elde edilir.

Ayrık Zaman Fourier Dönüşümü

P2.16. Bir kayma ile değişmez sistem DSKFE tarafından tanımlanmıştır.

$$y(n) = 0.5y(n-1) + bx(n)$$

ω=0'da $|H(e^{j\omega})|$'yı '1' yapan b ve yarı güç noktası ($|H(e^{j\omega})|^2$'deki tepe değerinin yarıya düştüğü sıklık değeridir) değerlerini bulun.

Bu fark eşitliği kullanılarak tanımlanan sistemin sıklık yanıtı

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

olarak elde edilir. Çünkü

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{b^2}{(1-0.5e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})} = \frac{b^2}{1.25\cos\omega}$$

şeklindedir. Eğer

$$\frac{b^2}{1.25-1} = 1$$

ise ω=0'da $|H(e^{j\omega})|$ '1'e eşittir. $b = \pm 0.5$ olduğunda bu doğrudur. Yarı güç noktasını bulmak için sıklık değeri bulunmak istenirse

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{0.25}{1.25\cos\omega} = 0.5$$

elde edilir. $\mathrm{Cos}\omega$=0.75 veya $\omega = 0.23\pi$ olduğunda bu doğrudur.

P2.17. Fark eşitliği aşağıdaki gibi tanımlanan bir sistem alalım. Burada $|a| < 1$ olmak üzere a ve b gerçel sayılardır.

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) + x(n-1)$$

Eğer sıklık yanıtı tüm ω'lar için sabit bir genlik değerine sahipse, yani $|H(e^{j\omega})| = 1$ ise, a ve b arasındaki ilişkiyi bulun.

Farzedelimki bu ilişki var olsun ve $a = \frac{1}{2}$ ve $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 u(n)$ olduğunda sistem çıkışını bulalım. DKD sistemin sıklık çıkışı fark eşitliğinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

Karesi alınmış genlik

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(b+e^{-j\omega})(b+e^{j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})(1-e^{j\omega})} = \frac{1+b^2+2b\cos\omega}{1+a-2a\cos\omega}$$

şeklindedir. Böylece eğer yalnız eğer $b = -a$ olursa $|H(e^{j\omega})| = 1$'dir. Eğer $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 u(n)$, $a = \frac{1}{2}$ ve $b = \frac{1}{2}$ ise $Y(e^{j\omega})$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{-\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{-\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

bulunur. AZFD'yi kullanarak, Çizelge 2.1'den

$$(n+1)a^n u(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

elde edilir ve AZFD'nin doğrusallık ve gecikme özelliklerinden

$$y(n) = -\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

bulunur. Bu örnekten $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$ olmasına rağmen, doğrusal olmayan evrenin giriş dizi değerlerinde belirleyici bir etkisi olduğu görülmüştür.

P2.18. Sıklık yanıtı $H\left(e^{j\omega}\right)$ olan bir DKD sistemin aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini gösterin.

$$\tau_h(\omega) = \frac{H_G\left(e^{j\omega}\right)G_G\left(e^{j\omega}\right) + H_S\left(e^{j\omega}\right)G_S\left(e^{j\omega}\right)}{|H(e^{j\omega})|^2}$$

Burada; $H_G\left(e^{j\omega}\right)$ ve $H_S\left(e^{j\omega}\right)$, $H\left(e^{j\omega}\right)$'nın sırasıyla gerçel ve sanal kısımları ve $G_G\left(e^{j\omega}\right)$ ile $G_S\left(e^{j\omega}\right)$ ise $n \cdot h(n)$'in AZFD'sinin gerçel ve sanal kısımlarıdır.

Genlik ve evreden, sıklık yanıtı

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\theta_h(\omega)}$$

yazılır. Burada $H\left(e^{j\omega}\right)$'nin logaritması alınırsa evrenin belirgin bir ifadesinin bulunabileceği belirtilmelidir.

$$\ln H\left(e^{j\omega}\right) = \ln\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| + j\theta_h(\omega)$$

ω'ya göre türev alındığında

$$\frac{d}{d\omega}\ln H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}\cdot\frac{d}{d\omega}H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{d}{d\omega}\ln\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| + j\frac{d}{d\omega}\theta_h(\omega)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanında sanal kısımlar eşitlenirse

$$\frac{d}{d\omega}\theta_h(\omega) = \mathrm{Sa}\left\{\frac{1}{H(e^{j\omega})}\cdot\frac{d}{d\omega}H\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{d}{d\omega}H\left(e^{j\omega}\right) = \acute{H}_G\left(e^{j\omega}\right) + j\acute{H}_S\left(e^{j\omega}\right)$$

burada $\acute{H}_G\left(e^{j\omega}\right)$, $H\left(e^{j\omega}\right)$'nın gerçel kısmının türevi ve $\acute{H}_S\left(e^{j\omega}\right)$, $H\left(e^{j\omega}\right)$'nın sanal kısmının türevi olmak üzere şeklinde tanımlanırsa, grup gecikmesi

$$\tau_h(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\theta_h(\omega) = -\mathrm{Sa}\left\{\frac{\acute{H}_G\left(e^{j\omega}\right) + j\acute{H}_S\left(e^{j\omega}\right)}{H(e^{j\omega})}\right\}$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada, grup gecikmesi için bu eşitliğin sayısal değerlendirme için uygun olduğu belirtilmelidir. Çünkü bu eşitlik hesaplanırken h(n) ve $n \cdot h(n)$'in sadece AZFD'sinin hesabı yapılmaktadır. Türev alma işlemi yoktur.

P2.19. α gerçel sayı olmak üzere aşağıda verilen her sistem için grup gecikmesini bulun.

(a) $H_1(e^{j\omega}) = 1 - \alpha e^{-j\omega}$

(b) $H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

(c) $H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-2\alpha\cos\theta e^{-j\omega}+\alpha^2 e^{-j2\omega}}$

(a) İlk sistem için sıklık yanıtı

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \alpha\cos\omega + j\alpha\sin\omega$$

şeklindedir. Bu nedenle, evre

$$\phi_1(\omega) = \tan^{-1}\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}$$

bulunur. Çünkü

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

olduğu için grup gecikmesi

$$\tau_1(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\phi_1(\omega) = -\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right)^2}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right)$$

şeklindedir. Böylece

$$\tau_1(\omega) = -\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos\omega}\right)^2}\cdot\frac{(1-\alpha\cos\omega)\alpha\cos\omega-(\alpha\sin\omega)^2}{(1-\alpha\cos\omega)^2}$$

elde edilir. Bir basitleştirme ile

$$\tau_1(\omega) = -\frac{(1-\alpha\cos\omega)\alpha\cos\omega-(\alpha\sin\omega)^2}{(1-\alpha\cos\omega)^2+(\alpha\sin\omega)^2} = \frac{\alpha^2-\alpha\cos\omega}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}$$

bulunur. Bu problemi çözmenin diğer bir yolu Problem 2.18'de türetilen grup gecikmesi için elde edilen eşitliği kullanmaktır. $H_1(e^{j\omega}) = 1-\alpha\cos\omega + j\alpha\sin\omega$ olmak üzere

$$H_G(e^{j\omega}) = 1-\alpha\cos\omega \quad \text{ve} \quad H_S(e^{j\omega}) = \alpha\sin\omega$$

şeklindedir. Çünkü birim örnek yanıtı

$$h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

formundadır. Buradan

$$g(n) = nh(n) = -\alpha\delta(n-1)$$

kullanılarak

$$G(e^{j\omega}) = -\alpha e^{j\omega} = -\alpha\cos\omega + j\alpha\sin\omega$$

bulunur. Böylece, grup gecikmesi bir önceki sonuçla aynı şekilde

$$\tau_1(\omega) = \frac{H_G(e^{j\omega})G_G(e^{j\omega}) + H_S(e^{j\omega})G_S(e^{j\omega})}{|H(e^{j\omega})|^2} = \frac{-\alpha\cos\omega\,(1-\alpha\cos\omega)-(\alpha\sin\omega)^2}{(1-\alpha\cos\omega)^2+(\alpha\sin\omega)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2-\alpha\cos\omega}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}$$

elde edilir.

(b) $H_1(e^{j\omega}) = 1 - \alpha e^{-j\omega}$ için elde edilen grup gecikmesi kullanılarak, $H_1(e^{j\omega})$'nın tersi olan $H_2(e^{j\omega})$'nın grup gecikmesi kolaylıkla bulunabilir.

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} = \frac{1}{H_1(e^{j\omega})}$$

Özellikle

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{H_2(e^{j\omega})}$$

olduğu için $\phi_2(\omega) = -\phi_1(\omega)$'dir ve böylece

$$\tau_2(\omega) = -\tau_1(\omega) = \frac{\alpha^2 - \alpha\cos\omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}$$

elde edilir.

(c) Son sistem için $H_3(e^{j\omega})$ aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır.

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2\alpha\cos\theta\, e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega}} = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j\theta} e^{-j\omega})} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\theta} e^{j\omega})}$$

Böylece, $H_3(e^{j\omega})$'nın grup gecikmesi bu iki çarpımın grup gecikmesinin toplamıdır. Başka bir deyişle, her çarpımın grup gecikmesi basit olarak evrenin türevinin alınmasıyla bulunur. Ayrıca, bu terimlerin grup gecikmesi eğer AZFD'nin kipleme özelliği kullanılıyorsa kısım (b)'deki evre $\tau_2(\omega)$'dan bulunabilir. Özellikle, eğer x(n)'in AZFD $X(e^{j\omega})$ ise, $e^{jn\theta}x(n)$'in AZFD'si

$$e^{jn\theta}x(n) \overset{\text{AZFD}}{\Longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\theta)}) = |X(e^{j(\omega-\theta)})| e^{j(\omega-\theta)}$$

şeklindedir. Eğer x(n)'in grup gecikmesi $\tau(\omega)$ ise, $e^{jn\theta}x(n)$'in grup gecikmesi $\tau(\omega-\theta)$ olacaktır. Kısım (b)'de $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$'nin grup gecikmesi

$$\tau(\omega) = \frac{\alpha^2 - \alpha\cos\omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}$$

bulunur. Böylece, kipleme özelliğinden $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega-\theta)}}$'nın grup gecikmesi

$$\tau(\omega) = \frac{\alpha^2 - \alpha\cos(\omega-\theta)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega-\theta)}$$

elde edilir ve $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega+\theta)}}$'nın grup gecikmesi

$$\tau(\omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha\cos(\omega+\theta)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega+\theta)}$$

bulunur. Böylece $H_3(e^{j\omega})$'nın grup gecikmesi iki çarpanın toplamıdır.

$$\tau_2(\omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha\cos(\omega-\theta)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega-\theta)} - \frac{\alpha^2 - \alpha\cos(\omega+\theta)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\omega+\theta)}$$

SÖZLÜK

A-B

Ara değerleme:	Interpolation
Ardışıl:	Cascade
Ayrık zaman:	Discrete time
Birim örnek yanıtı:	Unit sample response
Birletim:	Conjugation

C-Ç-D

Çok terimli:	Polynomial
Doğrusal katışım:	Linear combination
Doğrusal sabit katsayılı fark denklemi:	Linear constant coefficient difference equation
Doğrusal zamanla değişmez:	Linear shift invariant
Dönem:	Period
Dönemsel:	Periodic
Dönemsellik:	Periodicity
Dönüşüm:	Transform
Dürtü işlevi:	Dirac delta function

E-F

Eşlenik simetrik:	Conjugate symmetric
Eşlemleme:	Mapping
Evre:	Phase
Evrişim:	Convolution

G-H

Genelleştirilmiş doğrusal evre:	Generalized linear phase
Genlik:	Magnitude
Gerçel:	Real
Gerçel değerli:	Real valued
Grup gecikmesi:	Group delay

I-İ-J

İm: Signal
İşleç: Operator
İşlev: Function

K-L

Kararlılık: Stability
Karmaşık değerli: Complex valued
Karmaşık üstel işlev: Complex exponential function
Kayma ile değişmezlik: Shift invariance
Kesim sıklığı: Cut-off frequency
Kiplenim: Modulation
Kipleyici: Modulator
Log ölçekli genlik: Log magnitude scale

M-N

Mutlak toplanır: Absolutely summable
Nedensellik: Causality

O-Ö

Öbek: Block
Öz değer: Eigen value
Öz işlev: Eigen function

P-R

S-Ş-T

Sanal: Imaginary
Sıklık: Frequency
Sıklık izgesi: Frequency spectrum
Sıklık seçici süzgeçler: Frequency selective filters
Sıklık yanıtı: Frequency response
Sürekli zaman: Continuous time
Süzgeç: Filter

Toplayıcı: Adder
Tümlev: Integral
Tüm geçiren: Allpass

U-Ü

V-Y-Z

Yarı güç noktası: Half power point
Yumuşatma: Smoothing
Yürüyen ortalamalı süzgeç: Moving average filter
Zaman tersinimi: Time reversal